☜ على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (06 نقاط)

I)- **1**)- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7 ، ثم استنتج باقي قسمة العدد A على 7

حيث : $A = 5^{2022} + 1443$.

2)- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $222^n + 4 \times 5^n + 337$ قابلا للقسمة على 7 .

3)- B عدد طبيعي غير معدوم مكتوب في النظام ذو الأساس 10 كما يلي : $B = \overline{20xx}$

- عين قيم العدد الطبيعي x الذي يحقق : $B \equiv 6[7]$.

II)- **1**)- تحقق أن العدد 337 أولي .

2)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $14x - 337y = 2022 ....(1)$

أ)- تحقق أن المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ ب)- حلل العدد 2022 إلى جداء عوامل أولية .

جـ)- بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 337 ، ثم استنتج حلول المعادلة (1).

د)- عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق : $x \times y - 2696 = 0$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

1)- (C) هو التمثيل البياني للدالة f على المجال : $[0, +\infty[$ المعرفة بـ : $f(x) = x^2 - 2x + 2$

(كما هو موضح في الوثيقة المرفقة)

- لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

أ)- مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية .

ب)- ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب هذه المتتالية .

جـ)- باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أثبت أنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $1 \prec U_n \prec 2$

د)- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ماذا نستنتج ؟ - أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2)- لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = Ln(U_n - 1)$.

أ)- أثبت أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها. (لاحظ أن: $U_n^2 - 2U_n + 2 = (U_n - 1)^2 + 1$)

ب)- عين حدها الأول V_0 . أكتب V_n ، U_n بدلالة n ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

جـ)- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \log\left(\sqrt{U_0 - 1}\right) + \log\left(\sqrt{U_1 - 1}\right) + \ldots\ldots + \log\left(\sqrt{U_n - 1}\right)$

- أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

د)- نعتبر الجداء P_n حيث : $P_n = \dfrac{1}{(U_0 - 1)} \times \dfrac{1}{(U_1 - 1)} \times \ldots\ldots\ldots \times \dfrac{1}{(U_n - 1)}$

- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $P_n = \dfrac{1}{2} e^{2^n Ln4}$

التمرين الثالث:(08 نقاط)

الجزء الأول :

الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - (2x + 4)e^{x-2}$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$1 + 2e^{-5}$	$\searrow$	$-\infty$

1)- أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.4 \prec \alpha \prec 0.5$.

2)- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2e^{x-2}-\frac{1}{4}x^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1)- أحسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\frac{1}{2}xg(x)$ ، استنتج اتجاه تغيرا لدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3)- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

4)- عين نقاط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

5)- انشئ (C_f) على المجال $[-5,2]$ (نأخذ : $f(\alpha)\approx -0.2$)

6)- عين قيم الوسيط الحقيقي التي من أجلها المعادلة : $e^x=\left(\frac{m}{x^2}+\frac{1}{4}\right)\times e^2$ تقبل ثلاث حلول مختلفة .

7)- لتكن الدالتين g و G المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2e^{x-2}$ ، $G(x)=(x^2-2x+2)e^{x-2}$

أ)- بين أن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g ، استنتج حساب : $\int_1^2 g(x)dx$

بـ)- أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) ومحور الفواصل و المستقيمين الذي معادلتهما :

$x=1$ $x=2$

الجزء الثالث :

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=e^{1-f(x)}$

أكتب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$، استنتج إشارتها ،ثم شكل جدول تغيرات الدالة h (دون حساب عبارة $h(x)$)

لا تضيع فرصة تقييم مستواك

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

I)- إختر الإجابة الصحيحة مع التبرير :

1)- (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_n = \int_n^{n+1} e^{2-x}dx$ ، المجموع : $U_0 + U_1 + ... + U_n$ يساوي :

أ)- $e^2\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right]$ ب)- $e(e-1)\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n}\right]$ جـ)- $e(e-1)\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right]$

2)- A عدد حقيقي حيث : $A = \dfrac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt[4]{16} \times \sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$

أ)- $A = \frac{1}{2}$ ب)- $A = 2$ جـ)- $A = \sqrt{2}$

II)- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x - 6y = 3$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}$ الجملة : $\begin{cases} \alpha \equiv -1[6] \\ \alpha \equiv -4[5] \end{cases}$ بطريقتين مختلفتين .

التمرين الثاني: (08 نقاط)

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما تحقق : $\begin{cases} U_5 = 32768 \\ U_7 = 2097152 \end{cases}$

1)- أوجد الأساس q لهذه المتتالية و حدها الأول U_0 .

2)- أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n ، أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3)-أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

4)- باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1 + 8 + 8^2 + ... + 8^n = \frac{8^{n+1} - 1}{7}$$

5)-عين العدد الطبيعي n بحيث : $1 + 8 + 8^2 + ... + 8^n = 19173961$

6)- أ)- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 8^n على 13.

بـ)- استنتج باقي قسمة العدد α على 13 حيث : $\alpha = 102 \times 38^{2022} + 5^{1443} - 3$.

جـ)- عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $7S_n \equiv 4[13]$

7)- أ)- برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6) \times 8^{2n} [13]$

بـ)- عين قيم العدد الطبيعي التي تحقق : $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$ و n مضاعف للعدد 2 .

التمرين الثالث:(08 نقاط)

الجزء الأول :

- لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ بـ : $f(x) = x + 2 - Ln(2x+1)^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1)- أحسب : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا.

2)- ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3)- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (Δ) معامل توجيهه -3، ثم اكتب معادلته .

4)- أوجد إحداثيتي نقطتي تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي (T) معادلته : $y = x$.

5)- أحسب : $f(-1)$ ، $f(6)$ ثم أنشىء (C_f) و (Δ).

6)- لتكن الدالتين h و H المعرفتان على المجال $\left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$ بـ :

$$h(x) = Ln(2x+1) \quad ، \quad H(x) = \left(\frac{2x+1}{2}\right)Ln(2x+1) - x$$

أ)- بين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h.

بـ)- أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذي معادلتهما $x = 0$

$x = \lambda$ حيث : $\lambda \succ 0$. جـ)- بين أن : $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = +\infty$.

الجزء الثاني :

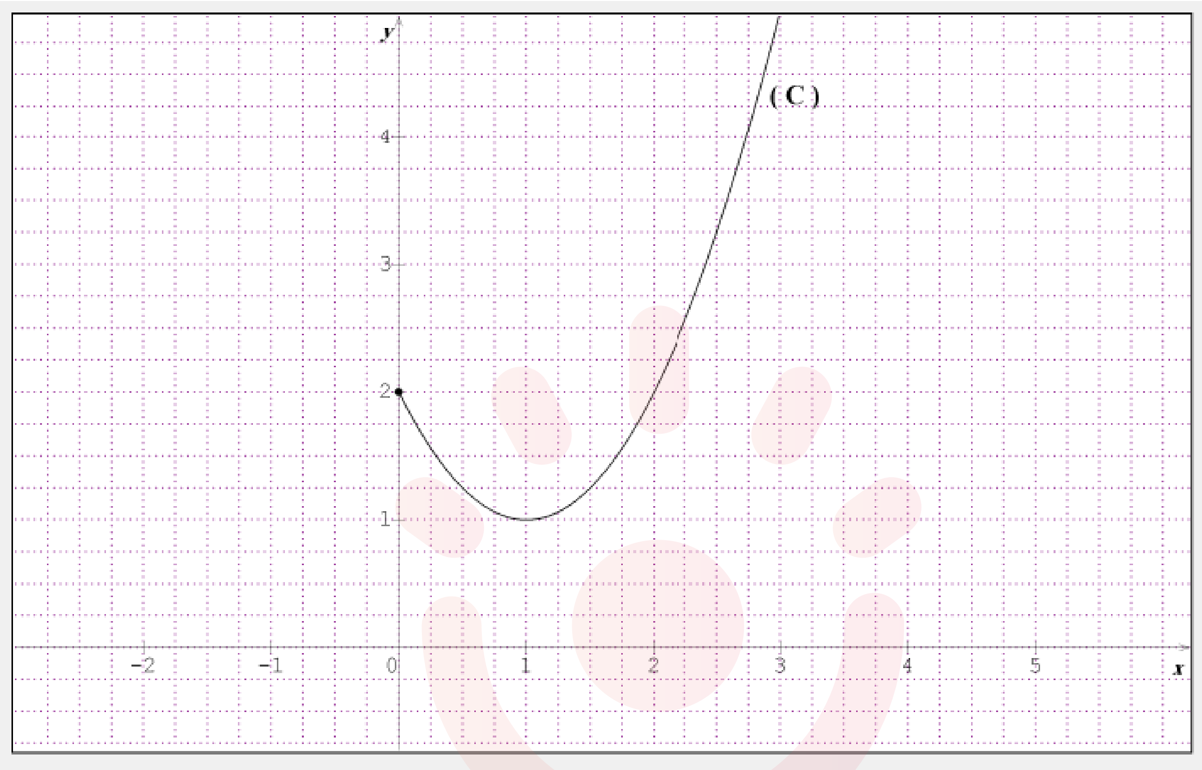
- لتكن الدالة g المعرفة على $D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ بـ : $g(x) = \frac{3}{2} + \left|x + \frac{1}{2}\right| - 2Ln\left|2x + 1\right|$ ، (C_g) تمثيلها البياني

أ)- أثبت أنه من أجل كل $x \neq -\frac{1}{2}$ يكون $-x - 1 \neq -\frac{1}{2}$ و ، $g(-1-x) = g(x)$ فسر هذه النتيجة بيانا .

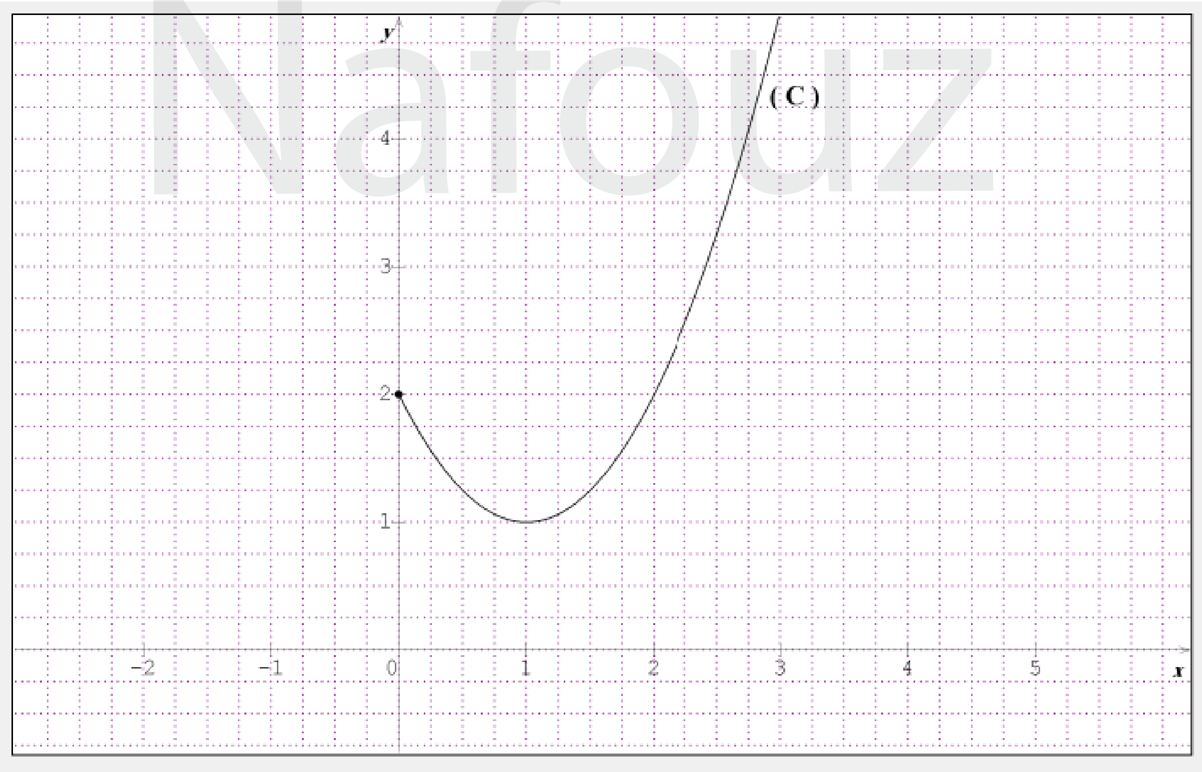
بـ)- أثبت أن : $g(x) = f(x)$ على مجال يطلب تعيينه .

جـ)- إشرح كيفية إنشاء (C_g) إنطلاقا من (C_f) ، ثم انشئه في نفس المعلم السابق (استعمل الالوان للتوضيح)

الوثيقة المرفقة : التمرين الثاني الموضوع الأول : الإسم و اللقب: ....



الوثيقة المرفقة : التمرين الثاني الموضوع الأول : الإسم و اللقب: ....



الموضوع الأول :

التمرين الأول :☹☺☹ ______ (06نقاط)

I)- 1)- بواقي قسمة العدد 5^n على 7 :

$5^0\equiv1[7]$ ، $5^1\equiv5[7]$ ، $5^2\equiv4[7]$ ، $5^3\equiv6[7]$ ، $5^4\equiv2[7]$ ، $5^5\equiv3[7]$ ، $5^6\equiv1[7]$.

ومنه : $P=6$ ....(01ن)

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k\in\mathbb{N}$
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	$[7]$

- $1443\equiv1[7]$ ، $2022=337\times6$ معناه : $5^{2022}\equiv1[7]$ ومنه : $A\equiv2[7]$

باقي قسمة A على 7 هو 2 . ...(0.5ن)

2)- $222\equiv5[7]$ ومنه : $222^n\equiv5^n[7]$ ، $222^n+4\times5^n+337\equiv\left(5^{n+1}+1\right)[7]$

$222^n+4\times5^n+337\equiv0[7]$ معناه : $5^{n+1}+1\equiv0[7]$ ، $5^{n+1}\equiv6[7]$ ، $n+1=6k+3$ $(k\in\mathbb{N})$ ومنه :

$n=6k+2$ $(k\in\mathbb{N})$ ....(01ن)

3)- $(0\le x<10)$ $B=2\times10^3+10x+x=11x+2000$

$B\equiv6[7]$ معناه : $4x+5\equiv6[7]$ ، $4x\equiv1[7]$ ، $8x\equiv2[7]$ ، $x\equiv2[7]$ و منه :

$(k\in\mathbb{N})$ $x=7k+2$ ، لكن : $0\le x<10$ و منه : $0\le7k+2<10$ ، $\frac{-2}{7}\le k<\frac{8}{7}$ ، $k\in\{0,1\}$.

و منه : $x=2$ أو $x=9$. ($B=2022$ أو $B=2099$ غير مطلوب) ....(0.75ن)

II)- 1)- $\sqrt{337}\approx18.35$ ، 337 لا يقبل القسمة على : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ومنه العدد 337 أوليا......(0.5ن)

2)-أ)- $PGCD(14,337)=1$ $\left(1/2022\right)$ ومنه المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ . ...(0.25ن)

ب)- $2022=2\times3\times337$ ....(0.25ن)

جـ)- $14x-337y=2022$ يكافئ : $14x=337(y+6)$ ، $337/4x$ لكن : 14 و 337 أوليان فيما بينهما و منه :

حسب مبرهنة غوص : $337/x$ ....(0.25ن)

- $(k\in\mathbb{Z})\quad x=337k$ ، بتعويض x بما يساويه في المعادلة (1) نجد : $y=14k-6$ و منه :

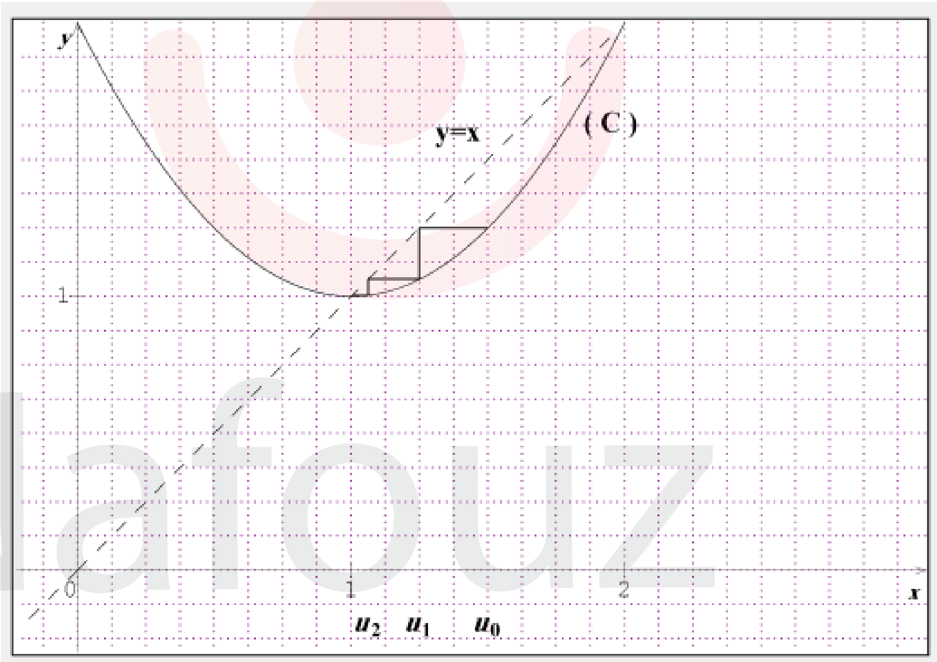
$S=\{(337k,14k-6)\quad k\in\mathbb{Z}\}$ ....(01ن)

د)- $x\times y-2696=0$ يكافئ : $337k(14k-6)-2696=0$ أي أن : $7k^2-3k-4=0$

$\Delta=121$ ، $k_1=1$ ، $k_2=\frac{-4}{7}$ مرفوض و منه : $S'=\{(337,8)\}$ ....(0.5ن)

التمرين الثاني: ☹☺☹ ______ (08نقاط)

1)- أ)- تمثيل الأربع حدود الأولى من (U_n) . ...(0.25ن)



بـ)- (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$. (U_n)متقاربة . ...(0.5ن)

جـ)- البرهان بالتراجع ....(0.75ن)

د)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1}-U_n=U_n^2-3U_n+2=(U_n-1)(U_n-2)$

بما أن $1<U_n<2$ فإن : (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ . ...(0.5ن)

(U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة : $\lim_{n\to+\infty}U_n=l$ ....(0.25ن)

$l^2-3l+2=0$ ، $\Delta=1$ مرفوض ، $l_2=2$ ، $l_1=1$ ومنه : $\lim_{n\to+\infty} U_n=1$ ....(0.25ن)

2)- أ)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1}=\ln(U_{n+1}-1)=\ln(U_n^2-2U_n+2-1)=\ln\left[(U_n-1)^2\right]$

$V_{n+1}=2\ln(U_n-1)=2V_n$ $(1\prec U_n\prec 2)$ ومنه : (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول :

$V_0=Ln\left(\frac{3}{2}-1\right)=Ln\left(\frac{1}{2}\right)=-Ln2$ ....(0.5ن)(0.25ن)(0.25)

ب)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n=-2^n Ln2$ ، $U_n=e^{V_n}+1=e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}+1$ ....(0.5ن)(0.5 ن)

بما ان : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}=0$ ومنه : $\lim_{n\to+\infty} U_n=1$ ....(0.25ن)

جـ)-
$$S_n=\frac{1}{2Ln10}\left[Ln(U_0-1)+Ln(U_1-1)+........+Ln(U_n-1)\right]$$
$$S_n=\frac{1}{2Ln10}\left[V_0+V_1+.....+V_n\right]=\frac{1}{2Ln10}\left[\frac{-Ln2}{1-2}\left(1-2^{n+1}\right)\right]$$

ومنه : $S_n=\left(\frac{1-2^{n+1}}{2}\right)\log 2$ ....(0.5ن)

$\lim_{n\to+\infty} S_n=-\infty$ ....(0.25ن)

د)- $e^{V_n}=U_n-1$ $\quad \frac{1}{e^{V_n}}=e^{-V_n}=\frac{1}{U_n-1}$

$$P_n=e^{-V_0}\times e^{-V_1}\times......\times e^{-V_n}=e^{-V_0-V_1-......-V_n}=e^{-(V_0+V_1+......+V_n)}$$

$P_n=e^{-Ln2\left(1-2^{n+1}\right)}=e^{Ln\frac{1}{2}+2^{n+1}\ln 2}=\frac{1}{2}e^{2^n\times 2Ln2}=\frac{1}{2}e^{2^n Ln4}$ ....(0.5ن)

التمرين الثالث :☹☺☹ ________________ (08نقاط)

الجزء الأول :

1)- مبرهنة القيم المتوسطة ....(0.25ن)

2)- إشارة $g(x)$: ....(0.5ن)

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
إشارة $g(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

الجزء الثاني

1)- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2\left(e^{x-2}-\frac{1}{4}\right)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{x-2}-\frac{1}{4}\right)=+\infty$ ....(0.5ن)

2)- f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$:

$f'(x)=2xe^{x-2}+x^2e^{x-2}-\frac{1}{2}x=\frac{4xe^{x-2}+2x^2e^{x-2}-x}{2}=\frac{-x\left(-4e^{x-2}-2xe^{x-2}+1\right)}{2}$ ومنه :

$f'(x)=-\frac{1}{2}xg(x)$ ....(0.5ن)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x$		+	0	-		-	
$g(x)$		+		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

و منه : f متناقصة تماما على المجال : $[0,\alpha]$ ، f متزايدة تماما على المجال : $]-\infty,0]\cup[\alpha,+\infty[$ ....(0.5ن)

جدول تغيرات الدالة f : ....(0.75ن)

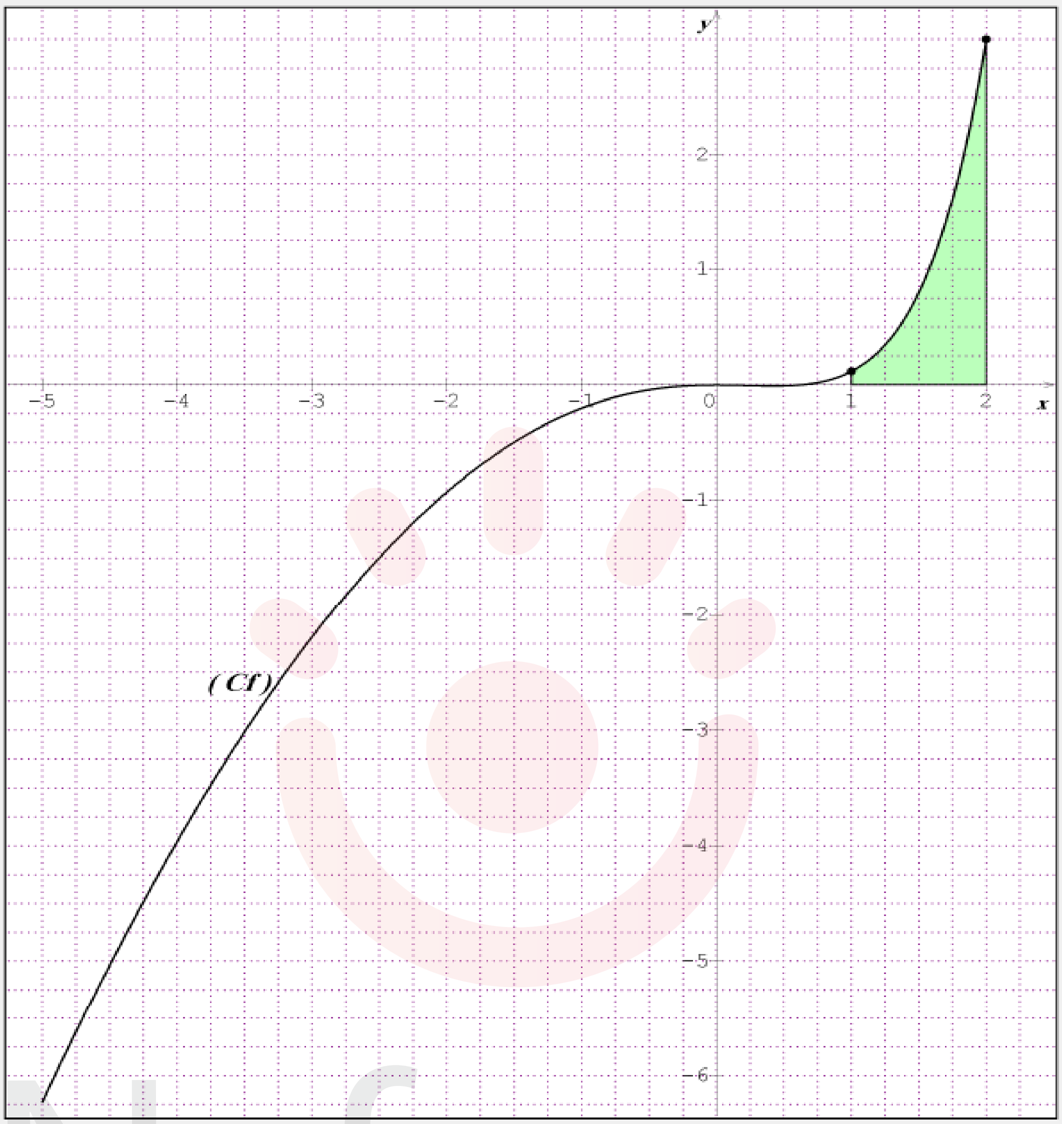
x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3)- $(T): y=f'(x)(x-2)+f(2)=7x-11$ ....(0.25ن)

4)- $(C_f)\cap(xx')$: $f(x)=0$ يكافئ : $x^2\left(e^{x-2}-\frac{1}{4}\right)=0$ ومنه : $x=0$ أو $x=2-Ln4$.

$(C_f)\cap(xx')=\{O,A(2-Ln4,0)\}$ ....(0.5ن)

5)- إنشاء (C_f): ....(01ن)



6-) $e^x=\left(\frac{m}{x^2}+\frac{1}{4}\right)\times e^2$ معناه : $f(x)=m$ ، للمعادلة ثلاث حلول يكافئ : $m\in\left]-0.2;0\right[$ ....(0.5ن)

G قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $G'(x)=(2x-2)e^{x-2}+\left(x^2-2x+2\right)e^{x-2}=\left(2x-2+x^2-2x+2\right)e^{x-2}$

ومنه : $G'(x)=x^2e^{x-2}=g(x)$ ....(0.25ن)

$\int_1^2 g(x)dx=G(2)-G(1)=2-e^{-1}$ ....(0.5ن)

ومنه : $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 g(x)dx+\int_1^2\frac{-1}{4}x^2dx=2-e^{-1}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{17}{12}-e^{-1}$

$S=\left(\frac{17}{3}-\frac{4}{e}\right)cm^2$ ....(0.75ن)

الجزء الثالث :

h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $h'(x) = -f'(x)e^{1-f(x)}$..(0.5ن)

h و f متعاكستان في اتجاه التغير . ...(0.25ن)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	

جدول تغيرات الدالة f : ....(0.5ن)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$e^{1.2}$	$\searrow$	0